《实变函数与泛函分析》教学大纲

课程编码：1512106004

课程名称：实变函数与泛函分析

学时/学分：64/4

先修课程：《数学分析》、《复变函数》

适用专业：信息与计算科学

开课教研室：分析与方程教研室

一、课程性质与任务

1．课程性质：《实变函数与泛函分析》是大学数学系的重要专业方向课之一，它是数学分析的延续和发展。

2．课程任务：通过这门课程的教学应使学生掌握近代抽象分析的基本思想，培养学生综合运用分析数学的几何观点和方法，理解和研究分析数学中的许多问题，为进一步学习现代数学理论和理解现代科学技术提供必要的基础。

二、课程教学基本要求

实变函数与泛函分析包括两部分内容："实变函数"与"泛函分析"。"实变函数"主要学习测度论、可测函数论、积分论、微分与不定积分；"泛函分析"是通过在集合中引入各种结构，包括代数结构，拓扑结构、测度结构、序结构以及这些基本结构的各种复合，形成了各种各样的抽象空间，本课程主要研究这些抽象空间中的距离空间，赋范线性空间，内积空间的性质及其映射(线性算子和线性泛函)性质。

三、课程教学内容

第一章　　集合

1.教学基本要求

通过本章的系统学习，使学生熟悉集合列的上极限集、下极限集、极限集的定义与交、并运算表示，集合的对等、基数概念；掌握有限集、可数集、不可数集的概念，可数集是最小的无限集的结论以及可数集的基本运算性质，自然数集、整数集、有理数集等的可数性，有理数集在实数轴上的稠密性。

2.要求学生掌握的基本概念、理论

通过本章教学使学生熟悉集合列的上、下极限集、极限集的定义与交、并运算表示；掌握单调集合列{Ak}的概念及其极限集的求法。熟悉集合的对等概念，熟悉对等是一个等价关系；熟悉集合对等的 Cantor-Bernstein 定理; 掌握集合对等的夹挤定理。熟悉集合的基数概念；掌握有限集、可数集、不可数集的概念；掌握可数集是最小的无限集的结论以及可数

集的基本运算性质；掌握自然数集、整数集、有理数集等的可数性；掌握有理数集在实数轴上的稠密性；熟悉无理数集、实数集、区间点集等的不可数性。熟悉对角线法；会建立正有理数集与自然数集等常见的可数集之间的对等关系；会建立开区间、闭区间、半开半闭区间等常见的不可数集之间的对等关系。

3.教学重点和难点

教学重点是集合对等的概念，可数集及可数集的性质。教学难点是可数集，不可数集，集合列的上、下极限集。

4. 教学内容

第一节　集合的表示

1. 集合的定义
2. 集合的表示

第二节　　集合的运算

1. 集合的交和并
2. 集合的差
3. 集合的上、下极限

第三节　　对等与基数 集类

1. 映射和集合的对等
2. Bernstein 定理

第四节　　可数集合

1. 可数集合的定义及性质
2. 常用的可数集合

第五节　　不可数集合

1. 常用的不可数集合
2. 不可数集合的基数

第二章　　点集

1.教学基本要求

通过本章学习使学生了解度量空间和 n 维欧氏空间的概念。掌握内点、极限点、开集、闭集等拓扑概念及其性质，Cantor 集的构造及其性质。

2.要求学生掌握的基本概念、理论

通过本章教学使学生深刻理解和熟悉掌握内点、极限点、开集、闭集等拓扑概念及其性质、并能熟练运用这些概念进行逻辑推理。掌握 Cantor 集的构造及其性质。了解连续性、覆盖等概念。

3.教学重点和难点

教学重点是聚点等价定理；开集,闭集的定义及性质；开集,闭集的构造定理；Cantor 三分集。教学难点是线性变换的矩阵表示和矩阵的 Jordan 标准形的方法及求出相应的相似变换矩阵的方法。

4. 教学内容

第一节　度量空间和 n 维欧氏空间

1. 度量空间与度量函数
2. 度量空间中关于点集的相关概念

第二节　　内点,聚点,界点

1. 内点,聚点,界点的定义，聚点的等价条件
2. 开核、边界、导集定义及性质
3. Weierstrass 定理

第三节　　开集,闭集，完备集

1. 开集、闭集的定义及性质
2. 完备集

第四节　　直线上开集,闭集，完备集的构造

1. 开集的构造定理
2. 闭集、完备集的构造定理

第五节　　Cantor 三分集

1. Cantor 三分集
2. Cantor 三分集的性质

第三章　　测度论

1.教学基本要求

通过本章学习使学生深刻理解和掌握外测度与测度的概念，掌握测度的基本性质。了解从 Rn 上的外测度与测度推广到一般集合上的基本思路

2.要求学生掌握的基本概念、理论

通过本章的系统学习，使学生熟悉测度的基本性质，深刻理解和掌握外测度与测度的概念。掌握可测集的运算封闭性，可测集的逼近性质。了解博雷尔及定义，掌握可测集和博雷尔集的关系。

3.教学重点和难点

教学重点是可测集的概念与性质、测度的性质、可测集的逼近性质。教学难点是可测集的概念与性质、可测集的逼近性质。

4. 教学内容

第一节　外测度

1. 外侧度的定义及性质
2. 例子

第二节　　可测集

1. 可测集的定义
2. 可测集的性质

第三节　　可测集类

1. 几个简单的可测集合
2. 博雷尔集
3. 可测集的逼近性

第四章　　可测函数

1.教学基本要求

通过本章学习使学生掌握可测函数的定义及其基本性质，可测函数列的几种不同的收敛概念及其相互关系。

2.要求学生掌握的基本概念、理论

通过本章教学使学生掌握可测函数的定义及其基本性质。掌握可测函数列的几种不同的收敛概念及其相互关系，了解 Egorou 定理、Lebesgue 定理、Riesz 定理、Luzin 定理的证明思路。

3.教学重点和难点

教学重点是可测函数的性质、可测函数与简单函数的关系、Egoroff 定理、Riesz 定理、Lusin 定理、依测度收敛、几种收敛之间的关系。教学难点是 Lusin 定理，依测度收敛。

4. 教学内容

第一节　可测函数及其性质

1. 实数域的推广
2. 可测函数的定义及举例
3. 可测函数的性质
4. 可测函数与简单函数

第二节　　Egoroff 定理

1. Egoroff 定理

第三节　　可测函数的构造

1. Lusin 定理
2. Lusin 定理的另外表述

第四节　　依测度收敛

1. 依测度收敛的定义及举例

2. 依测度收敛与几种收敛的关系

第五章　　Lebesgue 积分

1. 教学基本要求

通过本章学习使学生理解 Lebesgue 积分的定义，掌握 Lebesgue 积分的基本性质，Lebesgue 积分的定理（包括这些定理的条件结论），弄懂其证明思路。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论

通过本章教学使学生深入理解 Lebesgue 积分的定义，掌握 Lebesgue 积分的基本性质。牢固掌握 Lebesgue 积分的定理：Levi 定理、逐项积分定理、Fatou 引理、控制收敛定理及其若干推论，包括这些定理的条件结论，弄懂其证明思路。了解 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系，Riemann 可积的充要条件。

3. 教学重点和难点

教学重点是各类可测函数勒贝格积分的性质、Levi 定理、逐项积分定理、Fatou 引理、控制收敛定理及其若干推论、截面定理、Fubini 定理、Riemann 可积的充要条件、Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系。教学难点是控制收敛定理及其若干推论。

4. 教学内容

第一节　黎曼积分的局限性和勒贝格积分简介

1. 黎曼积分可积的条件

2. 黎曼积分的局限性

3. 勒贝格积分简介

第二节　　非负简单函数的勒贝格积分

1. 非负简单函数的勒贝格积分的定义

2. 非负简单函数的勒贝格积分的性质

第三节　　非负可测函数的勒贝格积分

1. 非负可测函数的勒贝格积分的定义

2. 非负可测函数的勒贝格积分的性质

3. Levi 定理、逐项积分定理、Fatou 引理

第四节　一般可测函数的勒贝格积分

1. 一般可测函数的勒贝格积分的定义

2. 一般可测函数的勒贝格积分的性质

3. 控制收敛定理及其若干推论

第五节　Lebesgue 积分与 Riemann 积分

1. Riemann 可积的充要条件

第六节 Lebesgue 积分的几何意义和 Fubini 定理

1. 截面定理、
2. 非负可测函数的勒贝格积分的几何意义
3. Fubini 定理

第六章 度量空间和赋范线性空间

1.教学基本要求

通过本章学习使学生了解度量空间、赋范空间的基本概念，掌握度量（距离）、度量空间、完备度量空间、可分空间、范数、赋范线性空间的定义。

2.要求学生掌握的基本概念、理论

通过本章教学使学生了解度量（距离）与度量空间的定义与基本例子；熟悉度量（距离）的非负性、对称性和三角不等式；会验证某些函数是距离函数；掌握完备度量空间的定义与基本例子（欧氏空间、有界数列空间、收敛数列空间、连续函数空间 C[a,b]等都是完备度量空间）；掌握完备度量空间的压缩映射原理；知道一个空间是否完备与它被赋予的度量是密切相关的：C[a,b]在 Lp 范数下是不完备的；掌握可分空间的定义与基本例子（欧氏空间、连续函数空间 C[a,b]都是可分空间）；熟悉可分空间中任意一点都可以通过它的一个确定的可数稠密子集来逼近的特点；知道不可分空间是存在的：有界数列空间是不可分空间；知道一个空间是否可分与它被赋予的度量是密切相关的；掌握线性空间、线性空间的维数的定义与基本例子（欧氏空间、可测函数空间、连续函数空间、具有 k 阶连续导函数的空间等都是线性空间；掌握范数、赋范线性空间的定义与基本例子；熟练掌握范数的非负性、齐次性和三角不等式；掌握范数||x||关于 x 的连续性；掌握范数诱导出距离的思想；知道在拓扑同构的意义下，有限维赋范线性空间只有欧氏空间。

3.教学重点和难点

教学重点是压缩映照原理、度量空间、线性赋范空间。教学难点是度量空间的可分性、压缩映照原理及应用。

4. 教学内容

第一节 度量空间的进一步例子

1. 函数空间
2. 序列空间

第二节 度量空间中的极限、稠密集、可分空间

1. 度量空间点列的收敛及不同空间点列收敛的不同含义
2. 稠密集、可分空间的定义及例

第三节 连续映照

1.度量空间中连续映射的定义

2. 连续的充要条件

第四节　　完备度量空间和度量空间的完备化

1. 完备空间的定义及性质
2. 常见的完备空间
3. 度量空间的完备化定理

第五节　　压缩映射原理

1. 压缩映射原理
2. 压缩映射原理的应用

第六节　　线性赋范空间和 Banach 空间

1. 线性空间的基本概念和例
2. 范数的定义及相关收敛
3. 两个重要的 Banach 空间

第七章　　线性有界算子和线性连续泛函

1. 教学基本要求

通过本章学习使学生理解线性算子和线性泛函的概念，理解连续性与有界性的等价，理解 算子范数和算子空间。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论

通过本章教学使学生理解线性算子、泛函及其连续性、有界性的定义与刻画；掌握线性算子、泛函及其连续性、有界性的定义与刻画：T：X　　Y 是连续算子当且仅当 T 是有界算子。

3. 教学重点和难点

教学重点是压缩映照原理、度量空间、线性赋范空间。教学难点是线性变换的矩阵表示和矩阵的 Jordan 标准形的方法及求出相应的相似变换矩阵的方法。

4. 教学内容

第一节　线性有界算子和线性连续泛函

1. 线性算子和线性泛函的定义及例
2. 有界线性算子
3. 线性有界算子和线性连续泛函的举例

第二节　　线性算子空间和共轭空间

1. 有界线性算子所成的空间
2. 共轭空间

第八章　　内积空间和希尔伯特空间

1.教学基本要求

通过本章学习使学生掌握Banach空间、内积与内积空间、Hilbert空间的定义，了解正交系、规范（标准）正交系、完全规范正交系或规范（标准）正交基的概念。

2.要求学生掌握的基本概念、理论

通过本章教学使学生掌握内积与内积空间的定义与基本例子；熟练掌握内积的正定性、首元线性性与共轭对称性；掌握内积诱导范数的思想；熟练掌握内积诱导范数的基本性质、和的范数恒等式；掌握内积满足Schwarz不等式并且是二元连续函数的事实；掌握内积空间的特征：范数满足平行四边形法则；掌握 Hilbert 空间的定义与基本例子；知道在同构的意义下，可分的Hilbert空间只有Rn与l2；掌握正交向量的定义；知道正交向量满足勾股定理，而且在实内积空间中，勾股定理是两个向量正交的充分必要条件；了解极小化向量定理与正交分解定理（投影定理）；　了解正交系、规范（标准）正交系、完全规范正交系或规范（标准）正交基的概念与基本例子；掌握Gram-Schmidt正交化过程；知道每个非零的可分Hilbert空间X必存在规范（标准）正交基。

3.教学重点和难点

教学重点是Schwarz不等式，投影定理，规范正交系。教学难点是投影定理。

4. 教学内容

第一节　内积空间

1. 内积空间的定义
2. Schwarz 不等式
3. 内积空间的举例

第二节　　投影定理

1. 正交性
2. 投影定理

第三节　　希尔伯特空间

1. 希尔伯特空间
2. 规范正交系
3. 连续线性泛函
4. 伴随算子

第九章　　巴拿赫空间中的基本定理

1.教学基本要求

通过本章学习使学生了解Banach空间的定义，掌握Banach空间的三大基本定理的含义。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论

通过本章教学使学生掌握Banach空间的定义，模等价，了解有界线性算子熟悉开映象定理，逆函数定理，闭图像定理，共鸣定理；熟悉连续线性泛函的存在性与、Hahn-Banach定理；弄清弱收敛、弱-*收敛，弱列紧、弱-*列紧性。

3. 教学重点和难点

教学重点是Banach空间的定义，模等价。教学难点是开映象定理，逆函数定理，闭图像定理，共鸣定理。

4. 教学内容

第一节　泛函延拓定理

1. 一般线性空间中的泛函延拓定理
2. 赋范空间中的泛函延拓定理

第二节　　C[a，b]的共轭空间

1. Riesz表示定理

第三节　　共轭算子

1. 共轭算子的定义及性质

第四节　　纲定理和一致有界定理

1. 纲定理
2. 一致有界定理

第五节　　强收敛和弱收敛

1. 强收敛和弱收敛的定义
2. 几种收敛之间的关系

第六节　　逆算子定理和闭图像定理

1. 逆算子定理
2. 闭图像定理

四、学时分配表

章序	内容	课时	备注
一	集合	6	
二	点集	8	
三	测度论	8	
四	可测函数	8	
五	积分论	10	
六	度量空间与赋范线性空间	8	
七	有界线性算子和连续线性泛函	6	

八	内积空间和希尔伯特空间	6	
九	巴拿赫空间中的基本定理	4	
合计		64	

五、主用教材及参考书

（一）主用教材：

《实变函数与泛函分析基础》(第三版) 主编：程其襄、张奠宙等 出版社：高等教育出版社 出版或修订时间：2010 年。

（二）参考书：

1. 《实变函数论》 主编：侯友良 出版社：武汉大学出版社 出版时间：2011 年。
2. 《实变函数论》(第三版) 主编：江泽坚、吴智泉、纪友清 出版社：高等教育出版社 出版时间：2007 年。
3. 《泛函分析》 主编：侯友良 出版社：武汉大学出版社 出版时间：2011 年。

执笔：李春燕

审定：张秦 梁桂珍