

《高等代数 II》教学大纲

课程编码：090023

课程名称：高等代数 II

学时/学分：72/4

先修课程：《解析几何》、《高等代数 I》

适用专业：数学与应用数学

开课教研室：几何与代数教研室

一、课程性质与任务

1. 课程性质：《高等代数 II》是学科基础平台课程，是数学与应用数学专业主要的必修课。它不仅是应用学科的重要工具课，而且在近代数学理论中也是一门很重要的理论基础课，牢固掌握和深入理解其中的思想方法和技巧，对于大学生是非常重要的，也为高观点下深入理解中学教学内容所必需。本课程的教学目的和任务是向学生介绍代数最基本的概念、理论与方法，使学生不仅能掌握一些处理问题的基本方法，而且能使他们对于高等代数的基础理论有一个深刻理解，从而为后续课程的学习打下坚实的基础。通过本课程的学习，培养学生独立思维能力、运算能力和解决实际问题能力，提高学生的数学推理论证能力、创新能力和抽象思维能力。本课程开设在第 3 学期。

2. 课程任务：通过学习本课程，使学生掌握二次型、线性空间、线性变换和欧氏空间的理论等高等代数的基础知识、基本方法、基本思路和代数学的基本思想方法，在学习过程中形成抽象思维能力和逻辑推理能力，培养与提高用代数理论分析问题与解决问题的能力。

二、课程教学基本要求

《高等代数 II》要求理解二次型的定义，掌握二次型的标准形的求法及正定二次型的一系列性质；理解线性空间的定义，掌握交空间、和空间及直和的判定及性质；理解线性变换的定义及简单性质，掌握线性变换在不同基下的矩阵的性质、线性变换的值域与核的应用问题；理解欧氏空间及对称变换的定义，掌握对称变换与实对称矩阵之间的关系的有关性质。

本课程的成绩考核形式：末考成绩（闭卷考查）（70%）+平时成绩（平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等）（30%）。成绩评定采用百分制，60 分为及格。

三、课程教学内容

第五章 二次型

1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生掌握二次型概念及其矩阵表示，掌握二次型化标准形的方法及矩阵合同概念，掌握正定二次型的概念、判别及性质。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学,使学生掌握二次型的一般表示,对称写法,矩阵表示;在数域 P 上化二次型为标准形的方法:配方法和合同变换法;化复二次型、实二次型为规范形的方法,规范形的唯一性,实二次型的秩,正、负惯性指数,符号差等概念;复二次型(复对称矩阵)、实二次型(实对称矩阵)等价(合同)的充要条件;复二次型、实二次型按等价分类(复对称矩阵、实对称矩阵按合同分类)的概念;判定实二次型(实对称矩阵)正定性的判别方法,特别是顺序主子式判别法。

3. 教学重点和难点

教学重点是配方法和初等变换法化标准形和正定性的判别。教学难点是化标准形和正定性的判别。

4. 教学内容

第一节 二次型的矩阵表示

1. 二次型的矩阵及矩阵表示,二次型的秩
2. 二次型的非退化线性替换与二次型的等价
3. 合同矩阵

第二节 二次型的标准型

1. 二次型的标准形
2. 数域 P 上任一 n 元二次型都可以经过非退化线性替换变成标准形
3. 配方法化二次型为标准形
4. 初等变换法化二次型为标准形

第三节 复二次型和实二次型的规范形

1. 复数域上对称矩阵(二次型)合同(等价)规范标准形(规范形)的存在唯一性
2. 复数域上对称矩阵(二次型)合同(等价)的充要条件
3. 实数域上对称矩阵(二次型)合同(等价)规范标准形(规范形)的存在唯一性
4. 实数域上对称矩阵(二次型)的惯性指标和符号差
5. 实数域上对称矩阵(二次型)合同(等价)的充要条件

第四节 正定二次型

1. 正定二次型的定义
2. 实二次型为正定二次型的判定条件

第六章 线性空间

1. 教学基本要求

通过本章教学,使学生能够理解线性空间概念,掌握线性空间简单性质,理解向量组的线性相关性问题,掌握基、维数、坐标的概念。理解子空间概念,掌握生成子空间、子空间和交及直和等概念。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学,使学生掌握线性相关、线性无关、维数、基、坐标、子空间、子空间的交与和、子空间的直和、余子空间;线性空间的简单性质,基变换和坐标变换;空间的判别法,生成子空间的集合形式;两个生成子空间相等的条件,生成子空间的基、维数的求法;维数公式及其证明方法并能灵活应用;掌握常用的几个子空间直和的判别法;同构映射的基本性质;数域 P 上两个有限维线性空间同构的条件。

3. 教学重点和难点

教学重点是线性空间维数和基的求解,子空间的交、直和。教学难点是对同构和直和的理解。

4. 教学内容

第一节 线性空间的定义与简单性质

第二节 维数、基与坐标

1. 向量组的线性相关性
2. 基与维数的定义及性质
3. 基的过渡矩阵及其性质
4. 向量的坐标,坐标变换公式

第三节 线性子空间

1. 子空间的定义和判别条件
2. 子空间的交与和
3. 有限维子空间的交与和的维数公式
4. 子空间的直和、余子空间,余子空间的存在性

第四节 线性空间的同构

1. 同构的定义及简单性质
2. 有限维线性空间同构的充要条件

第七章 线性变换

1. 教学基本要求

通过本章教学,使学生正确理解线性变换的概念,掌握其运算及基本性质。掌握线性变换的矩阵表示。深刻理解矩阵(变换)的特征值、特征向量等基本概念,掌握矩阵可对角化的理论和方法。理解和掌握线性变换的核、值域、不变子空间等概念。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握线性变换的基本性质,线性变换的运算;可逆变换的概念,及其常用的判别法;利用矩阵计算一个向量在线性变换之下的象,线性变换在不同基下的矩阵是相似的,而两个相似的矩阵可以看成同一线性变换在某两个基下的矩阵;线性变换的特征

值与特征向量的概念和 n 阶方阵的特征多项式有限维线性空间中线性变换的特征值、特征向量的求法； n 阶方阵的特征多项式的结构定理及哈密顿—凯莱定理； n 维线性空间 V 的一个线性变换可对角化的一些充分条件与充要条件；线性变换的值域、核、秩和零度等概念，及其性质；按线性变换的特征值将空间分解成不变子空间的直和。

3. 教学重点和难点

教学重点是线性变换在不同基下矩阵的关系，矩阵的对角化及不变子空间。教学难点是线性变换的值域与核，线性空间按特征值分解成不变子空间的直和。

4. 教学内容

第一节 线性变换的定义

1. 线性变换的定义
2. 线性变换的简单性质

第二节 线性变换的运算

1. 加法与数量乘法及其算律
2. 乘法及其算律，线性变换的多项式
3. 可逆线性变换及其逆变换

第三节 线性变换的矩阵

1. 线性变换的矩阵
2. 向量的象的坐标公式
3. 线性变换与矩阵的同构对应
4. 线性变换在不同基下的矩阵，相似矩阵

第四节 特征值与特征向量

1. 特征值、特征向量和特征多项式的定义和求法
2. 矩阵的秩和行列式与特征值的关系
3. 相似矩阵的特征多项式

第五节 对角矩阵

1. 属于不同特征值的特征向量的线性无关性
2. 特征子空间的维数与所属特征值的重数的关系
3. 线性变换和矩阵可对角化的条件

第六节 线性变换的值域与核

第七节 不变子空间

1. 不变子空间的定义和简单性质
2. 不变子空间与简化线性变换的矩阵之间的关系

第八节 * 矩阵的若当 (Jordan) 标准形

第九章 欧氏空间

1. 教学基本要求

通过本章教学，使学生正确理解欧氏空间的定义与基本性质。掌握标准正交基的求法。掌握正交变换与对称变换等重要概念。

2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握 Cauchy-Schwarz 不等式；度量矩阵的性质与不同基的度量矩阵之间的关系；正交基、标准正交基等概念，Schmidt 正交化方法，正交阵的简单性质；正交变换的几个等价刻画；一个子空间的正交补的存在唯一性与其集合形式；实对称矩阵的特征值、特征向量的特性；求正交阵 T ，使实对称矩阵正交相似于对角阵的方法；用正交线性替换化实二次型为标准形的方法。

3. 教学重点和难点

教学重点是内积、标准正交基及利用正交变换化实对称矩阵为对角形。教学难点是标准正交基的求法与用正交变换化实对称矩阵为对角形。

4. 教学内容

第一节 欧氏空间的定义与基本性质

1. 内积的定义和简单性质
2. Cauchy-Schwarz 不等式
3. 向量的长度、夹角、正交、距离
4. 度量矩阵

第二节 标准正交基

1. 正交组、标准正交组、正交基、标准正交基
2. 在标准正交基下向量的坐标、内积、长度、距离
3. Schmidt 正交化方法
4. 标准正交基的过渡矩阵、正交矩阵及其简单性质

第三节 欧氏空间的同构

1. 同构的定义和简单性质
2. 有限维欧氏空间同构的充要条件

第四节 正交变换

1. 正交变换的定义
2. 正交变换的等价条件（保持向量的长度不变、把标准正交基变成标准正交基、在标准正交基下的矩阵为正交阵）
3. 正交变换的类型
4. * 二维和三维欧氏空间的正交变换的类型

第五节 子空间的正交

1. 子空间的正交、正交子空间的和
2. 正交补，正交补的存在唯一性

第六节 对称变换

1. 实对称矩阵
2. 对称变换

说明：大纲中教学内容带“*”号的为选讲内容。

四、学时分配

章序	内容	课时	备注
五	二次型	16	
六	线性空间	20	
七	线性变换	20	
九	欧氏空间	16	
合计		72	

五、主用教材及参考书

(一) 主用教材：

《高等代数》第四版 主编：北京大学数学系前代数小组
出版社：高等教育出版社 出版时间：2013年。

(二) 参考书：

1. 《高等代数》(第四版) 主编：张禾瑞、郝炳新
出版社：高等教育出版社 出版时间：1999年
2. 《高等代数简明教程》(上、下) 主编：蓝以中
出版社：北京大学出版社 出版时间：2002年
3. 《高等代数》(上、下) 主编：丘维声
出版社：高等教育出版社 出版时间：2013年

执笔：许寿方

审定：郭宏旻 梁桂珍