

# 《偏微分方程》教学大纲

课程编码: 110820

课程名称: 偏微分方程

学时/学分: 54/3

先修课程: 《数学分析》、《高等代数》、《常微分方程》

适用专业: 数学与应用数学

开课教研室: 分析与方程教研室

## 一、课程性质与任务

1. 课程性质: 本课程开设在第 6 学期, 是数学与应用数学专业的一门重要的专业选修课。

2. 课程任务: 本课程是偏微分方程的入门课, 其特点是以数学分析, 高等代数和常微分方程为基本工具, 讨论偏分方程的古典理论, 并且适当渗入一些现代偏微分方程理论的重要思想和方法。课程教学的目的是为偏微分方程在其它领域的应用和学习现代数学(包括现代偏微分方程)提供基础和桥梁。

## 二、课程教学基本要求

《偏微分方程》要求学生在保持物理模型讲述的完整性前提下列出相对应的偏微分方程, 并根据所学内容进行分析求解。本课程在各部分内容的讨论中, 除了保证数学上的严密性之外, 还注意对其实际意义的解释, 并穿插有关的历史事例, 为讨论注入活力并向学生介绍正确的数学观。

成绩考核形式: 末考成绩(闭卷考查)(70%) + 平时成绩(平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等)(30%)。成绩评定采用百分制, 60 分为及格。

## 三、课程教学内容

### 第一章 基本概念和一阶偏微分方程

#### 1. 教学基本要求

让学生掌握多重指标记号, 偏微分方程中的基本概念和定解问题的意义。

#### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生了解 L. Schwartz 多重指标, 偏微分方程的阶, 方程的四类分法(线性, 半线性, 拟线性和完全非线性), 古典解, 广义解, 定解条件, 定解问题及定解问题的适定性(存在性, 唯一性和连续依赖性)。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是多重指标记号。教学难点是定解条件，定解问题及定解问题的适定性(存在性，唯一性和连续依赖性)。

### 4. 教学内容

#### 第一节 记号和基本概念

1. 记号
2. 基本概念
3. 定解条件和定解问题
4. 偏微分方程小史
5. 本课程的打算

#### 第二节 一阶偏微分方程的求解

1. 拟线性方程的 Cauchy 问题
2. 一阶完全非线性方程的 Cauchy 问题

#### 第三节 全积分和包面

#### 第四节 幂级数和 Cauchy Kowalevskaja 定理

1. 实解析函数和优函数
2. 常微分方程的实解析解
3. Cauchy. Kowalevskaja 定理

## 第二章 定解问题的导出和二阶线性偏微分方程的分类及化简

### 1. 教学基本要求

掌握了解变分问题与微分方程之间的联系和能量原理。掌握二阶常系数和变系数线性偏微分方程的基本思想和方法。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生学会变分问题和定解问题：泛函，变分，极值问题和临界点；变分原理和偏微分方程：Hamilton 原理，最小势能原理，泛函临界点所满足的微分方程常系数二阶线性偏微分方程的分类和化简：五种类型(双曲型，超双曲型，椭圆型，抛物型及广义抛物型)，利用线性坐标变换化简成标准型；变系数二阶线性偏微分方程的分类及坐标变换：五种单纯类型(双曲型，超双曲型，椭圆型，抛物型及广义抛物型)和混合型，对自变量坐标变换的一般公式，极坐标变换，球坐标变换(三维及 n 维)；两个自变量的变系数二阶线性偏微分方程的变形：三种类型(双曲型，椭圆型，和抛物型)及一些特殊双曲型方程的求解。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是变分的计算和常系数二阶线性方程和两个自变量的变系数方程。教学难点是 Hamilton 原理偏微分方程的分类和化简以及变系数二阶线性偏微分方程的分类及坐标变换。

## 4. 教学内容

### 第一节 变分问题和微分方程与变分原理和定解问题

1. 泛函和变分问题
2. 定解问题

### 第二节 二阶线性偏微分方程的分类和化简

1. 二阶常系数线性偏微分方程的分类和化简
2. 变系数二阶线性偏微分方程的分类和有关的坐标变换
3. 两个自变量的变系数二阶线性偏微分方程的化简

## 第三章 二阶常系数线性偏微分方程的求解方法

### 1. 教学基本要求

掌握二阶常系数线性偏微分方程的齐次化原理，分离变量法和积分法的基本框架。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生掌握叠加原理和齐次化原理：线性微分算子，叠加原理，对非齐次项的齐次化原理，对初值的齐次化原理；级数解法 II (分离变量法)：Fourier 级数，特征值，特征函数，Sturm-Liouville 理论；积分解法：Fourier 积分，Fourier 变换，Laplace 变换，卷积，热传导方程初值问题的形式解

### 3. 教学重点和难点

教学重点是分离变量法和积分法。教学难点是 Fourier 级数，特征值，特征函数，Sturm-Liouville 理论；积分解法：Fourier 积分，Fourier 变换，Laplace 变换，卷积，热传导方程初值问题的形式解。

## 4. 教学内容

### 第一节 叠加原理和齐次化原理

1. 定解问题的分解
2. 齐次化 (Duhamel) 原理

### 第二节 Fourier 级数和分离变量法

### 第三节 Fourier 积分和积分变换

1. Fourier 积分定理
2. Fourier 变换及其性质
3. Laplace 变换及其性质

## 第四章 波动方程

### 1. 教学基本要求

掌握一，二，三维波动方程的物理意义和解法，波动方程的惟一性和稳定性。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章教学使学生学会波动方程的建立：主要是一维和二维的波动方程，三维的情形限于简单的描述；弦振动方程的初值问题和初边值问题：依赖区域，影响区域，d'Alembert 公式，决定区域，齐次化边值，古典解的存在性；二维和三维波动方程的初值问题：球平均法，降维法，求解公式，Huygens 原理；二维和三维波动方程的初边值问题：分类变量法，Bessel 函数，特殊函数；能量积分与波动方程初值问题和初边值问题的唯一性和稳定性；能量积分， $L^2$  范数，能量不等式及高维波动方程。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是一，二，三维波动方程的解法及其初值问题和初边值解的唯一性及稳定性。教学难点是二维和三维波动方程的初边值问题及高维波动方程。

## 4. 教学内容

### 第一节 波动方程的建立

1. 弦振动方程（一维波动方程）的建立
2. 膜振动方程（二维波动方程）的建立
3. 弹性介质中的振动方程（三维波动方程）的建立

### 第二节 弦振动方程的 Cauchy 问题与半无界弦的初边值问题

1. 弦振动方程的 Cauchy 问题
2. 半无界弦的初边值问题（拓法）

### 第三节 三维和二维波动方程的 Cauchy 问题

1. 三维波动方程的 Cauchy 问题（球平均法）
2. 二维波动方程 cauchy 问题的求解（降维法）
3. 依赖区域，决定区域和影响区域以及二维波动和三维波动的区别
4. 波动方程 Cauchy 问题的唯一性和稳定性，能量积分

### 第四节 波动方程在有界区域上的初边值问题

1. 弦振动方程的初边值问题
2. 有界区间上弦振动方程解的物理意义
3. 高维波动方程在有界区域上的初边值问题
4. 有界区域上波动方程初边值问题的唯一性和稳定

## 四、学时分配

章序	内容	课时	备注
一	基本概念和一阶偏微分方程	10	

二	定解问题的导出和二阶线性偏微分方程的分类及 化简	14	
三	二阶常系数线性偏微分方程的求解方法	14	
四	波动方程	16	
合计		54	

## 五、主用教材及参考书

### (一) 主用教材:

《偏微分方程》主编: 郇中丹, 黄海洋 出版社: 高等教育出版社 出版时间: 2004年。

### (二) 参考书:

1. 郇中丹, 黄海洋. 偏微分方程 北京: 高等教育出版社 出版时间: 2004年。

2. 姜礼尚, 陈亚浙, 刘西垣等. 数学物理方程讲义(第二版) 北京: 高等教育出版社 出版时间: 1996年。

3. M.A. Armstrong 著, 孙以丰译. 基础拓扑学 北京: 北京大学出版社 出版时间: 2002年。

执笔: 赵守娟

审定: 张 秦 梁桂珍