

# 《数学分析 II》教学大纲

课程编码：090130

课程名称：数学分析

学时/学分：90/4

先修课程：《数学分析 I》

适用专业：数学与应用数学专业

开课教研室：分析与方程教研室

## 一、课程性质与任务

1. 课程性质：《数学分析 II》是数学与应用数学专业的一门重要的核心课程。研究的主要内容是如何求解不定积分和定积分，如何理解和讨论反常积分的敛散性，它是分析数学系列课程之一，也是其他后继课程的重要基础，在第 2 学期开设。

2. 课程任务：掌握不定积分的概念、计算方法，掌握定积分的概念、可积条件、计算方法及几何意义、定积分的几何应用和物理应用；反常积分敛散的概念和敛散性的基本判别方法；初步培养具有用定积分解决实际问题的能力和敛散性的思想，为分析数学及其后继课程的学习打好必要的基础知识。开设本课程的目的是培养学生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析和解决问题的能力。通过系统的学习与严格的训练，使学生全面掌握数学分析中的积分理论知识；提高建立数学模型并应用积分理论工具解决实际应用问题的能力。

## 二、课程教学基本要求

掌握微分中值定理及其应用。理解区间套定理，聚点定理，有限复盖定理，理解实数完备性的基本含义。掌握不定积分的概念与运算法则，熟练应用换元法和分部积分法求解不定积分，掌握求有理函数与部分无理函数不定积分的方法。理解定积分的概念，牢固掌握微积分基本定理：牛顿—莱布尼兹公式用于定积分的计算，熟练运用微元法解决几何，物理中的实际问题，初步掌握定积分的数值计算。掌握反常积分的概念，熟练掌握反常积分的收敛判别法与反常积分的计算。

本课程总评成绩由期中考试、期末考试和平时学习情况两大部分构成，平时学习情况包括：课堂表现、出勤率及作业完成情况。成绩的评定采用百分制，60 分为及格。期末考试（闭卷考试）成绩占总评成绩的 70%，期中考试成绩占总评成绩的 20%，平时学习情况占总评成绩的 10%。

## 三、课程教学内容

### 第六章 微分中值定理及其应用

## 1. 教学基本要求

- (1) 深刻理解拉格朗日定理及其推论，掌握定理的证明，它的几种形式。
- (2) 理解罗尔定理，柯西定理，泰勒定理的证明。
- (3) 能用拉格朗日定理及其推论证明某些不等式，掌握利用函数的泰勒展开式求一些函数的极限的方法。
- (4) 熟悉掌握利用罗必达法则求各种不定型极限的方法。
- (5) 掌握函数单调性与导数间的联系与几何意义；明确函数在某一点  $x_0$  处单调的含义。掌握极限的要领与它的局部性质。
- (6) 掌握函数凸凹的解析定义与几何意义。掌握函数单调性，极值，凸凹性，拐点的判定方法。了解凸函数的基本性质。
- (7) 掌握利用导数证明不等式的基本方法。掌握基本初等函数的特性作图方法。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生掌握凸凹的解析定义，理解罗尔定理，柯西定理，泰勒定理，掌握利用罗必达法则求各种不定型极限的方法，掌握函数单调性，极值，凸凹性，拐点的判定方法。掌握利用导数证明不等式的基本方法。掌握基本初等函数的特性作图方法。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是拉格朗日定理和函数的单调性；柯西中值定理和不定式极限；泰勒公式；函数的极值与最大(小)值；函数的凸性与拐点。教学难点是泰勒公式，函数作图。

## 4. 教学内容

### 第一节 拉格朗日定理和函数的单调性

1. 罗尔定理与拉格朗日定理
2. 单调函数

### 第二节 柯西中值定理和不定式极限

1. 柯西中值定理
2. 不定式的极限

### 第三节 泰勒公式

1. 带有佩亚诺型余项的泰勒公式
2. 带有拉格朗日型余项的泰勒公式
3. 在近似计算上的应用

### 第四节 函数的极值与最大(小)值

1. 极值判别
2. 最大值与最小值

### 第五节 函数的凸性与拐点

1. 凸性的定义

2. 判断凸性的充要条件
3. 拐点的定义
4. 拐点的判定方法

## 第六节 函数图像的讨论

1. 函数作图的一般步骤
2. 函数作图的实例

## 第七章 实数的完备性

### 1. 教学基本要求

- (1) 理解区间套定理, 聚点定理, 有限覆盖定理的意义。
- (2) 了解区间套定理, 聚点定理, 有限覆盖定理。确界定理与单调有界定理, 柯西收敛准则的等价性, 理解实数完备性的基本含义。
- (3) 理解“覆盖”, “区间套”, “聚点”的概念, 弄清聚点与收敛子数列间的关系。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习, 使学生掌握“覆盖”, “区间套”, “聚点”的概念, 理解区间套定理, 聚点定理, 有限覆盖定理的意义, 理解实数完备性的基本含义。掌握用区间套定理证明命题的方法。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是区间套定理, 聚点定理和有限覆盖定理。教学难点是有关实数完备性基本定理的等价性的证明。

### 4. 教学内容

#### 第一节 关于实数集完备性的基本定理

1. 区间套定理
2. 聚点定理与有限覆盖定理

## 第八章 不定积分

### 1. 教学基本要求

- (1) 深刻理解原函数和不定积分的概念, 分清二者之间的区别与联系。
- (2) 理解不定积分的几何意义。
- (3) 掌握不定积分的运算法则。
- (4) 牢固掌握换元积分法与分部积分法的技巧。
- (5) 掌握有理函数积分法。
- (6) 掌握化简单无理函数与三角函数为有理函数积分的方法。
- (7) 掌握特殊三角函数的积分法。

(8) 掌握查不定积分表的方法。

(9) 理解初等函数的原函数不一定是初等函数，而有理函数的原函数一定是初等函数。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生掌握原函数和不定积分的概念。掌握不定积分的运算法则，牢固掌握换元积分法与分部积分法的技巧，掌握有理函数积分法，掌握化简单无理函数与三角函数为有理函数积分的方法。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是积分的概念、性质和换元积分法、分部积分法，不定积分的基本公式，有理函数积分的计算，区分三角函数、无理函数的积分和可化为有理函数积分的类型。教学难点是有理函数积分的计算，区分三角函数、无理函数的积分和可化为有理函数积分的类型。

## 4. 教学内容

### 第一节 不定积分概念与基本积分公式

1. 原函数与不定积分
2. 基本积分表

### 第二节 换元积分法与分部积分法

1. 换元积分法
2. 分部积分法

### 第三节 有理函数和可化为有理函数的不定积分

1. 有理函数的不定积分
2. 三角函数有理式的不定积分
3. 某些无理根式的不定积分

## 第九章 定积分

### 1. 教学基本要求

- (1) 深刻理解定积分定义及其几何意义。
- (2) 掌握可积的充分条件与必要条件。
- (3) 理解有界函数的达布上和、下和的概念及其性质。
- (4) 理解有界函数上、下和的概念以及与定积分概念之间的关系。
- (5) 掌握函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的一些等价命题。
- (6) 深刻理解变上限积分的概念及其连续性，可微性定理的证明。
- (7) 深刻理解微积分学基本定理，理解定积分与不定积分，微积分与积分之间的内在联系。
- (8) 熟练掌握用牛顿——莱布尼兹公式，变量替换公式及分部积分公式计算定积分。
- (9) 掌握证明函数可积性的方法。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习,使学生掌握定积分定义,有界函数的达布上和、下和的概念,变上限积分的概念。深刻理解微积分学基本定理,掌握函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的一些等价命题,熟练掌握用牛顿——莱布尼兹公式,变量替换公式及分部积分公式计算定积分。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是定积分的概念,定积分的思想,牛顿——莱布尼茨公式,定积分的性质,积分中值定理,可积的判断方法,微积分基本定理和定积分的计算。教学难点是证明函数的可积性。

## 4. 教学内容

### 第一节 定积分的概念

1. 问题提出
2. 定积分的定义

### 第二节 牛顿——莱布尼茨公式

1. 牛顿——莱布尼茨公式
2. 应用牛顿——莱布尼茨公式求定积分

### 第三节 可积条件

1. 可积的必要条件
2. 可积的充要条件
3. 可积函数类

### 第四节 定积分的性质

1. 定积分的基本性质
2. 积分中值定理

### 第五节 微积分学基本定理·定积分的计算(续)

1. 变限积分与原函数的存在性
2. 换元积分法与分部积分法
3. 泰勒公式的积分型余项

## 第十章 定积分的应用

### 1. 教学基本要求

- (1) 理解曲线段可求长的概念。
- (2) 掌握光滑曲线、微分曲线的曲率,曲率半径,曲率圆等概念。
- (3) 掌握微元法的定义。
- (4) 掌握弧长公式的推导。

(5) 掌握求平面图形的面积、旋转曲面的面积，由平行截面面积求体积。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生掌握曲线段可求长的概念，微元法的定义。掌握弧长公式，求平面图形的面积、旋转曲面的面积，由平行截面面积求体积。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是定积分在几何和物理方面的应用。教学难点是微元法。

## 4. 教学内容

### 第一节 平面图形的面积

1. 平面图形的面积公式
2. 利用面积公式求平面图形面积

### 第二节 由平行截面面积求体积

1. 空间立体 $\Omega$ 的体积
2. 旋转体的体积

### 第三节 平面曲线的弧长与曲率

1. 平面曲线的弧长
2. 曲率

### 第四节 平面图形的面积

1. 微元法
2. 旋转曲面的面积

### 第五节 定积分在物理中的某些应用

1. 液体静压力
2. 引力
3. 功与平均功率

## 第十一章 反常积分

### 1. 教学基本要求

- (1) 理解无穷限反常积分、无界函数反常积分概念。
- (2) 熟练掌握反常积分的收敛判别法与反常积分的计算方法。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生掌握无穷限反常积分、无界函数反常积分概念。熟练掌握反常积分的收敛判别法与反常积分的计算方法。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是两种反常积分的定义和性质；反常积分的判敛法；反常积分的计算方法。教学难点是反常积分的 **Cauchy** 收敛原理，非负函数无穷积分的比较判别法，**Cauchy** 判别法，

以及一般函数反常积分的 **Abel, Dirichlet** 判别法。

### 3. 教学内容

#### 第一节 反常积分的概念

1. 问题提出
2. 两类反常积分的定义

#### 第二节 无穷积分的性质与收敛判别

1. 无穷积分的性质
2. 非负函数无穷积分的收敛判别法
3. 一般无穷积分的收敛判别法

#### 第三节 瑕积分的性质与收敛判别

1. 瑕积分的性质
2. 非负函数瑕积分的收敛判别法
3. 一般瑕积分的收敛判别法

### 四、学时分配表

#### 1. 讲授内容及学时分配

| 章序 | 内容         | 课时 | 备注 |
|----|------------|----|----|
| 六  | 微分中值定理及其应用 | 20 |    |
| 七  | 实数的完备性     | 5  |    |
| 八  | 不定积分       | 13 |    |
| 九  | 定积分        | 16 |    |
| 十  | 定积分的应用     | 8  |    |
| 十一 | 反常积分       | 10 |    |
| 合计 |            | 72 |    |

#### 2. 实践内容及学时分配

| 序号 | 项目名称          | 内容提要  | 学时 | 必/选开 |
|----|---------------|---|----|------|
| 1  | 微分中值定理及其应用习题课 | 1. 利用导数证明不等式<br>2. 用罗必达法则求各种不定型极限<br>3. 求函数单调性, 极值, 凸凹性, 拐点 | 4  | 必开   |

|    |                   |   |    |    |
|----|-------------------|---|----|----|
| 2  | 不定积分<br>习题课       | 1. 利用换元积分法与分部积分法求不定积分<br>2. 求有理函数的不定积分和可化为有理函数的不定积分 | 4  | 必开 |
| 3  | 定积分习<br>题课        | 1. 证明函数的可积性<br>2. 定积分的计算<br>3. 利用换元积分法证明某些结论        | 4  | 必开 |
| 4  | 定积分的<br>应用习题<br>课 | 用微元法解决应用问题  | 2  | 必开 |
| 5  | 反常积分<br>习题课       | 1. 无穷积分的收敛判别<br>2. 瑕积分的收敛判别                         | 4  | 必开 |
| 合计 |                   |   | 18 |    |

## 五、主用教材及参考书

### (一) 主用教材:

《数学分析》(第四版)上册 主编:华东师范大学数学系 出版社:高等教育出版社 出版时间:2010年。

### (二) 参考书:

1. 《数学分析》(第二版) 主编:陈传璋,金福临,朱学炎,欧阳光中 出版社:高等教育出版社 出版时间:2002年。

2. 《数学分析》(第一版) 主编:陈纪修,於崇华,金路著 出版社:高等教育出版社 出版时间:2002年。

3. 《数学分析中的典型问题与方法》 主编:裴礼文 出版社:高等教育出版社 出版时间:2006年。

执笔: 雷轶菊

审定: 张秦 梁桂珍